Année universitaire 2010-2011
A. Pasquale

Espaces vectoriels

Un *espace vectoriel* sur le corps $\mathbb{K}$ des réels ou des complexes (les *scalaires*) est un ensemble non vide E, dont les éléments $\vec{u}$ sont appelés *vecteurs*, muni de deux opérations, soit l'addition de deux vecteurs

$$+ : E \times E \to E, \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}\,,$$

et la multiplication d'un vecteur par un scalaires

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E, \qquad (a, \vec{u}) \mapsto a\vec{u}\,,$$

qui vérifient les propriétés suivantes : pour tout $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$ et tout $a, b \in \mathbb{K}$

(1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (la somme de vecteurs est *associative*).
(2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (la somme de vecteurs est *commutative*)
(3) Il existe un vecteur $\vec{0} \in E$ (le vecteur nul) qui est l'*élément neutre* pour l'addition, c'est-à-dire $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ pour tout $\vec{u} \in E$.
(4) Il existe un vecteur $-\vec{u} \in E$ (l'*opposée de* $\vec{u}$) tel que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.
(5) $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$ (associativité mixte)
(6) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ (distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de vecteurs)
(7) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ (distributivité de la multiplication par un scalaire par rapport à l'addition de scalaires)
(8) $1\vec{u} = \vec{u}$

Exemples:

• L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices $m \times n$ muni des opérations habituelles d'addition et de multiplication par un scalaire est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

• L'ensemble $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ s'identifie avec les n-uplets de nombres réels $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}\}$:
Addition : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
Multiplication par scalaires : $a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$

• L'ensemble $\mathbb{R}_n[x]$ des polyômes à coefficients réels en la variable x de degrée $\leq n$:
$\mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_j \in \mathbb{R}\}$
$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, $c \in \mathbb{R}$
Addition : $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$
Multiplication par scalaires : $cp(x) = (ca_0) + (ca_1)x + (ca_2)x^2 + \cdots + (ca_n)x^n$

Propriétés : Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $\vec{u} \in E$:

$$a\vec{0} = \vec{0}\,, \qquad 0\vec{u} = \vec{0}\,, \qquad (-1)\vec{u} = -\vec{u}\,.$$

Un vecteur $\vec{u} \in E$ est dit *combinaison linéaire* d'une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ s'il existe n éléments $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots a_n\vec{u}_n$.

Exemple : $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ car $(1, 2, 3) = 1(1, 0, 1) + 0(0, 1, 0) + 2(0, 1, 1)$.

Un *sous-espace vectoriel* F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble non vide de E qui est aussi un espace vectoriel pour les opérations définies sur E.

Théorème : Un sous ensemble non vide F d'un espace vectoriel V est un sous-espace vectoriel de V s'il est fermé pour l'addition de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire, c'est-à-dire si toutes les conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $F \neq \emptyset$
(2) $F \subset E$
(3) $\vec{u} + \vec{v} \in F$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in F$
(4) $a\vec{u} \in F$ pour tout $\vec{u} \in F$ et $a \in \mathbb{K}$

Exemple : $F = \{(x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Propriété : Toute intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ une famille finie de vecteurs de E. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est un sous-espace vectoriel de E, dit le *sous-espace de E engendré* par $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et noté $\mathrm{Vect}\,\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ soient $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (1,1,0)$. Alors $\mathrm{Vect}\{u_1, u_2\} = \{(x+y, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est dite *génératrice de* F si $F = \mathrm{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$.
On dit que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est *génératrice* si $E = \mathrm{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$.

Une espace vectoriel E est dit de *dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Une famille $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est dite *libre* si

$$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots a_n\vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \ a_1 = \cdots = a_n = 0\,.$$

On dit aussi que les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont *linéairement indépendants.* Une famille qui n'est pas libre est dite *liée* ; ses vecteurs sont dits *linéairement dépendants*

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\{(1,-1,0), (2,0,1)\}$ est libre: en effet, si $(0,0,0) = a(1,-1,0) + b(2,0,1) = (a+2b, -a, b)$, alors $a + 2b = 0$, $-a = 0$ et $b = 0$, c'est-à-dire $a = b = 0$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Une famille finie $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de vecteurs qui est à la fois libre et génératrice est dite une *base* de E. Toute base d'un espace vectoriel E de dimension finie contient le même nombre d'éléments ; ce nombre est la *dimension* de E, notée $\dim E$.

L'espace vectoriel $E = \{\vec{0}\}$ est de dimension 0.

Soit E un espace vectorielle. Un sous-espace vectoriel F de E est dit une *droite vectorielle* si $\dim F = 1$ et un *plan vectoriel* si $\dim F = 2$.

La famille $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ une base de E si et seulement si pour tout $\vec{u} \in E$ il existe un et un seul n-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots a_n\vec{u}_n$. Les scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont les *coordonnées* de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples (bases canoniques) :

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ où

$$\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0),\ \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ \vec{e}_n = (0,0,\dots,0,1)\,.$$

Pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on a $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j\vec{e}_j$. La dimension de $\mathbb{R}^n$ est n.

- La base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est $\{E_{i,j} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ où $E_{i,j}$ est la matrice $m \times n$ dont toutes les coefficients sont 0 sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ on a $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}E_{i,j}$. La dimension de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est mn.

- La base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. La dimension de $\mathbb{R}_n[x]$ est $n+1$.

Théorème. Tout ensemble de n vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension n est une base de cet espace ; toute famille génératrice de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n est une base de cet espace.

Théorème de la base incomplète. Soit $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ une famille libre de l'espace vectoriel E de dimension n. Il existe alors vecteurs $\vec{u}_{m+1}, \dots, \vec{u}_n$ de E tels que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base de E.

Théorème. Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Il y a égalité de dimensions si et seulement si $F = E$.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et soient F et G deux sous-espaces de E. L'ensemble

$$F + G = \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in F, \vec{v} \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de E, noté $F + G$ et appelé *somme* de F et G.
La somme $F + G$ est *directe* si $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Elle est alors notée $F \oplus G$.
Deux sous-espaces F et G de E sont dits *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

Théoréme. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E. Alors $F + G$ est de dimension finie et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$. En particulier, $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Références :

(1) L. Amyotte : Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications, Éditions du Renouveau Pédagogique inc, 1999.
(2) E. Azoulay, Mathématiques Pharmacie, Cours et exercices corrigés, EdiSciences, 1993.
(3) C. Gautier, A. Warusfel et al. : *Mathématiques, tout-en-un, BCPST 2ème année*, Dunod, 2008.